Corentin Bergeron ENS Rennes

Espace de Bergman

Développement très cool à faire, qui se recase très bien, mais qui peut être dur pour certains candidats. On présente un lemme topologique reliant la topologie L^2 et la topologie de convergence uniforme sur tout compact. On démontrer ensuite que les espaces de Bergman sont des espaces de Hilbert, dont on trouvera une base hilbertienne et un noyau reproduisant.

Vous pouvez vous faire plaisir niveau recasage (l'avantage de ce développement) : 201, 205, 213, 234, 243, 245. On peut aussi argumenter de mettre ce développement en 208 (si on fait une partie esapces de Banach/Hilbert). Le recasage en 239 me parraît oser.

I - Le développement

Théorème 1 *Espace de Bergman*

Soit l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D}) := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire induit par $L^2(\mathbb{D})$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$e_n(z) := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$$

Alors :
(1) L'espace $L^2_a(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.
(2) La famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2_a(\mathbb{D})$.
(3) Toute application f de $L^2_a(\mathbb{D})$ s'écrit :

$$f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(\cdot, w) d\lambda(w),$$

où

$$\forall (z,w) \in \mathbb{D}^2,\ K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}.$$

La preuve du théorème repose sur le lemme topologique suivant, qui montrer que la topologie L^2 est plus forte que la topologie de convergence uniforme sur les compacts.

Lemme 2

Soit f un élément de $L^2_a(\mathbb{D})$ et K un compact de $\mathbb{D}$. Alors :

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(\partial\mathbb{D}, K)} \|f\|_2 .$$

Preuve :

Étape 1 : Preuve du lemme

Soit $a \in K$ et une réel $0 \leq r \leq 1 - |a|$, afin d'avoir $\overline{D}(a,r) \subset \mathbb{D}$. La formule de la moyenne donne que pour

$0 \leq \rho \leq r$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta. = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\rho d\theta.$$

Par changement de variable polaire, on a :

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(z)d\lambda(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta\right)\rho d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(a)\rho d\rho = f(a).$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}|f(a)| &= \left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(z)d\lambda(z)\right| \leq \left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 d\lambda(z)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} 1 d\lambda(z)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 d\lambda(z)\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\left\|f\right\|_{2,D(a,r)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\left\|f\right\|_2.\end{aligned}$$

Comme r est quelconque dans $[0, 1-|a|[$,quand $r \to 1-|a|$, on a :

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-|a|)}\left\|f\right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K,\partial\mathbb{D}}\left\|f\right\|_2,$$

et on en déduit le résultat.

Étape 2 : Montrer que c'est un Hilbert.

Pour cela, considérons $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $L^2_a(\mathbb{D})$. Par le lemme, on remarque que c'est aussi une suite de Cauchy de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, muni de la topologie de convergence sur tout compact. Par le théorème de Weierstrass, elle converge donc vers un éléments f de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, et en particulier converge simplement vers f.

De plus, $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{D})$ qui est complet, donc converge vers une application $g \in L^2(\mathbb{D})$. Par Riesz-Fischer, $(f_n)_n$ converge simplement vers g à une extraction près. On en déduit donc que $f = g$ presque partout et donc $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, ce qui conclut.

Étape 3 : Montrer que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.

Pour cela, remarquons d'abord que la famille est orthonormée. Si $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m d\lambda(z) = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^n r^m e^{in\theta}e^{im\theta}d\theta r dr = 2\pi\int_0^1 r^{n+m+1}\delta_{n,m}dr.$$

On en déduit que $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}$.

Pour montrer que cette famille est totale, utilisons le critère d'orthogonalité. Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ othogonale à la famille $(e_n)_n$.

On a par les formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, e_n \rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}e^{-in\theta}) d\theta r dr \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n 2\pi r^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r dr \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

et donc $f^{(n)}(0) = 0$. Finalement $f = 0$ et $(e_n)_n$ est totale.

Étape 4 : Preuve du dernier point.

Pour $z \in \mathbb{D}$, l'évaluation en z : $ev_z : f \to f(z)$ est continue d'après le lemme. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $k_z \in L^2_a(\mathbb{D})$ tel que $ev_z = \langle \cdot, k_z \rangle$.

Posons $K(z, w) = \overline{k_z(w)}$ pour tout $z, w \in \mathbb{D}$. D'après l'étape 3, on a dans $L^2_a(\mathbb{D})$:

$$K(z, \cdot) = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle k_z, e_n \rangle e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, k_z \rangle \overline{e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n}.$$

La convergence se fait dans $L^2_a(\mathbb{D})$, mais par le lemme, se fait aussi uniformément sur tout compact. En particulier :

$$\forall z, w \in \mathbb{D},\ K(z, w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} (z\overline{w})^n = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}$$

.



II - Remarques

1 - Développement très long (mais très coll et qui se recase très bien !) , et qui peut être très technique si on ne métrise pas la théorie holomorphe. Il faut bien connaître les formules de Cauchy, et savoir les retrouver (en dérivant 'sans justifier' sous l'intégrale, ou en supposant connu le fait que les fonctions holomorphes sotn analytiques). Le point (3) du théorème est un petit bonus, pas obligatoire à démontrer.

2 - Je suis passé le jour J sur ce développement pour la leçon 205 (l'autre choix était une démo du TIL, le jury est directement parti sur les espaces de Bargman). On m'a demandé de redétaillé quelques points du développement. On m'a aussi redemandé (pour l'étape 3), de retrouver les formules de Cauchy. Je n'avais pas la vraie démonstration en tête (celle que je connaissait permettait de démontrer en même temps l'analycité), mais ils m'ont demandé de partir de la forme DSE, pour retrouver par des Fubini le résultat. Une question m'a mis un peu dans le mal à la toute fin, est-ce que la topologie de convergence sur tout compact et la topologie L^2 coïncident pour les espaces de Bergman. Un sens est donné par le lemme. Le fait que la norme infinie soit plus forte est cependant faux, pensez à $\sum z^n$ qui converge pour la topologie de convergence uniforme sur tout compact vers $1/(1-z)$ qui n'est même pas dans l'espace de Bergman (si j'ai fait une erreur, contactez moi, je ne suis pas sûr de moi sur ce coups là).

3 - Pour le recasage en 234, vous pouvez le justifier par le fait que vous utilisez à de plusieurs reprises le changement de coordonnées polaires pour faire les calculs.

4 - Le dernier montre que $L^2_a(\mathbb{D})$ est un RKHS, c'est-à-dire un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Ce sont des espaces fonctionnels qui sont particulièrement utiles en statistique et en apprentissage. La fonction K est appelée noyau reproduisant.

III - Références

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis